Necessary and sufficient condition for the communicating tubes method convergence in the Hilbert space $\mathbf{L^2([a,b])}$

Condición necesaria y suficiente para la convergencia del método de vasos comunicantes en el espacio de Hilbert $\mathbf{L^2([a,b])}$

Manuel Verdes Piñeiro

Dedicatoria. Al autor de este teorema, el inefable y por mí nunca suficientemente amado Manuel Verdes Piñeiro.

Abstract. In this paper, it is obtained a neccesary and sufficient condition for the convergence in the cuadratic-integrable functions sucessions Hilbert space $L^2([a,b]$ of the variable change succession that was presented in [1], where were described the heuristics and the formal declarations of the communicating tubes method from a continous Riemann-integrable initial function $f(x),\ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$.

The study of the convergence starts with the necessary condition that was obtained in [1], that I get within another way, using the variable change functions sucession, and then the equivalence condition will be got with the conjunction proposition of this necessary condition paired with one condition that I prove to be the sufficient condition obtained in the paper [3].

Resumen. En este artículo se obtiene una condición necesaria y suficiente para la convergencia en el espacio de Hilbert $L^2([a,b])$ de la sucesión de cambio variable presentada en el anterior paper [1], donde fueron descritas la heurística y la declaración formal del método de vasos comunicantes a partir de una función continua Riemann-integrable inicial $f(x),\ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Para estudiar dicha convergencia se parte de la condición necesaria que se obtuvo en [1], que es de nuevo obtenida por otro camino, empleando la sucesión de funciones de cambio variable, y la condición de equivalencia resultará entonces ser la proposición conjunción de esta condición necesaria junto con una condición que probaré que es la condición suficiente obtenida en el paper [3].

1 Expresión formal de la sucesión de cambio variable para el método de vasos comunicantes

En el artículo [1] se describió el método de vasos comunicantes, que permite un cálculo indirecto de la integral definida de una función $f(x) \in \mathbf{C}^\infty$ en el intervalo $[a,b] \in \mathbb{R}$. Tras describirse la heurística que permite deducir formalmente este método, en [1] se describe formalmente la sucesión de funciones $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que bajo la condición suficiente hallada en [3] converge al valor medio del cálculo integral M en el intervalo. Recordaré aquí la expresión de $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $x_0 \in (a,b)$ denominaremos como sucesión de cambio variable

Mathematics Subject Classifications: 26A42
Autor: Manuel Verdes Piñeiro.
e-mail: manuel.verdes@gmail.com
Nro. de Registro: M-002790/2020

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &= f(x)\\
g_0(x_0) &= y_0\\
g_1(x) &= \frac{y_0}{p} + \frac{(p-1)y_0(b-a)g_0^{'}(x)}{p(g_0(b)-g_0(a))}\\
g_1(x_0) &= y_1\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
g_{k+1}(x) &= \frac{y_k}{p} + \frac{(p-1)y_k(b-a)g_k^{'}(x)}{p(g_k(b)-g_k(a))}\\
g_{k+1}(x_0) &= y_{k+1}
\end{aligned}
$$

En el caso de que, para algún valor de k se cumpliese $g_k(a) = g_k(b)$, se elegirían $a_1 = a, b_1 = b - \epsilon, a_2 = b - \epsilon = b_1, b_2 = b$, tales que $g_k(a_1) \neq g_k(b_1)$ y $g_k(a_2) \neq g_k(b_2)$, definiendo en cada uno de los dos intervalos una sucesión

$$
\begin{aligned}
g_{k+1}^{(i)}(x) &= \frac{g_k(x)}{p} + \frac{(p-1)y_{ki}(b_i-a_i)g_k^{'}(x)}{p(g_k^{(i)}(b_i)-g_k^{(i)}(a_i))}\\
g_{k+2}^{(i)}(x) &= \frac{g_{k+1}^{(i)}(x)}{p} + \frac{(p-1)y_{(k+1)i}(b_i-a_i)g_{k+1}^{(i)'}(x)}{p(g_{k+1}^{(i)}(b_i)-g_{k+1}^{(i)}(a_i))}\ ,\ i \in \{1,2\}\\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

siendo y_{ki} el valor que verifica $y_{ki} = g_k^{(i)}(x_0)$ y verificándose

$$M(b-a) = M_1(b_1-a_1) + M_2(b_2-a_2) \tag{1}$$

2 Teorema sobre la condición necesaria y suficiente para la convergencia del método de vasos comunicantes en el espacio de Hilbert $\mathrm{L}^2([\mathrm{a},\mathrm{b}])$

Teorema 1 *Dada $f(x) \in L_2([a,b])$, $x \in [a,b]$, sea $x_0 \in (a,b)$ verificando*

$$x_0 < a + \sqrt[i-1]{\frac{1}{i(b-a)\left(\frac{b-a}{|x-y|_{x,y/|f'(x)|_{max}=\sup\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}}} + \frac{|f(a)|}{\sup_{x,y\in[a,b]}|f(x)-f(y)|}\right)}},\quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

entonces el método de vasos comunicantes converge según la sucesión de cambio variable $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ al valor medio del cálculo integral M si y sólo si se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$\text{(1)}\quad \lim_{r\to\infty} f^{(r}(x) = \lim_{r\to\infty} g_0^{(r}(x) = 0, \quad x \in (a,b)$$

$$\text{(2)}\quad \max_{x\in[a,b]}|f(x)| < \frac{\max_{x,y\in[a,b]}|f(x)-f(y)|}{(b-a)i|x_0-a|^{i-1}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

PRUEBA.
Se probarán a continuación las implicaciones en ambos sentidos.

$\Rightarrow$
Como $f(x) \in L_2([a,b])$, entonces en particular $f(x)$ es representable en notación vectorial según la base canónica en $[a,b]$ de los monomios $(x-a)^r$, luego necesariamente se verifica que

$$\lim_{r\to\infty} f^{(r}(a) = 0$$

Para que tengan sentido los vectores $\{g_1, g_2, \cdots, g_k, \cdots\}$, esto es, $g_k \in L_2([a,b])$, ha de ser absolutamente sumable la serie $g_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g_0^{(m}(a)}{m!}(x-a)^m$, y por tanto la sucesión sumada en la anterior serie ha de tener límite 0. Ello se deduce de

$$\begin{aligned}
g_1 &= \lim_{m\to\infty} \frac{I_m}{p} \begin{bmatrix} g_0(a) \\ g_0^{'}(a) \\ \vdots \\ \frac{g_0^{(m-1}(a)}{(m-1)!} \end{bmatrix} \\
&+ \lim_{m\to\infty} \frac{(p-1)y_0(b-a)}{p(g_0(b)-g_0(a))} \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (x-a) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & (x-a)^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (x-a)^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0(a) \\ g_0^{'}(a) \\ \vdots \\ \frac{g_0^{(m-1}(a)}{(m-1)!} \end{bmatrix} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p} \left(I_m + (p-1) \frac{y_0(b-a)D_0(x)}{g_0(b)-g_0(a)} \right) g_0
\end{aligned}$$

$$g_{k+1} = T_k g_k = T_k T_{k-1} g_{k-1} = \left(\Pi_{l=0}^{k} T_{k-l}\right) g_0$$

$$g_0 = \lim_{m\to\infty} \begin{bmatrix} g_0(a) \\ g_0^{'}(a) \\ \vdots \\ \frac{g_0^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$\lim_{r\to\infty} f^{(r}(x) = \lim_{r\to\infty} g_0^{(r}(x) = 0, \quad x \in (a,b)$$

Por pertenecer $f(x) \in L_2([a,b])$, necesariamente sucede que

$$\int_a^b |f(s)|^2 ds < \int_a^b y_{max}^2 ds = y_{max}^2 (b-a) < \infty$$

siendo $y_{max} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $y_{min} = \min_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Con lo que se tiene que la función ha de estar acotada en el intervalo necesariamente.

$$y_{max} - y_{min} < y_{max} < \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)|(b-a) + |f(a)|$$

es decir

$$y_{max} - |f(a)| < \sup_{x,y\in[a,b]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}(b-a)$$

o sea, teniendo en cuenta la hipótesis sobre el valor x_0 tenemos

$$y_{max}|x-y| < y_{max}(b-a) < \sup_{x,y\in[a,b]} |f(x)-f(y)| \frac{(b-a)^2}{|x-y|} + |f(a)|(b-a) < \frac{\sup_{x,y\in[a,b]} |f(x)-f(y)|}{i(x_0-a)^{i-1}}$$

que es lo que queríamos demostrar.

$\Leftarrow$

Aplicamos el principio de inducción fuerte. Si tenemos

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| < \frac{\max_{x,y\in[a,b]} |f(x)-f(y)|}{(b-a)i|x_0-a|^{i-1}}, \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \tag{2}$$

y asumiendo cierta la hipótesis sobre x_0 y que $f(x) \in \mathbf{L^2}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, vamos a probar que la sucesión de funciones es contractiva, con $g_k \in \mathbf{L^2}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, y por lo tanto convergente a M, por ser en ese caso una sucesión de Cauchy en un espacio normado completo. Así pues, verificamos las hipótesis de inducción. Considerando

$$\begin{aligned}
g_0 = T_{-1}g_0 = Ig_0 &= S_0 g_0 \\
g_1 = T_0 g_0 = \left(\frac{1}{p}I + \frac{p-1}{p}\frac{y_0(b-a)}{g_0(a)-g_0(a)}D_0\right)g_0 &= S_1 g_0 \\
g_2 = T_1 g_1 = T_1 T_0 g_0 &= S_2 g_0 \\
g_3 = T_2 g_2 = T_2 T_1 T_0 g_0 &= S_3 g_0 \\
\dots
\end{aligned}$$

veamos que la sucesión $\{g_k\}$ es contractiva para $k=1$.

$$\frac{\|g_2-g_1\|}{\|g_1-g_0\|} = \frac{\|S_2-S_1\|\,\|g_0\|}{\|S_1-S_0\|\,\|g_0\|} \leq \frac{\|T_1-T_0\|\,\|T_0\|\,\|g_0\|}{\|T_0-I\|\,\|g_0\|} \tag{3}$$

$$\frac{\|g_2-g_1\|}{\|g_1-g_0\|} \leq \frac{\max_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{(1-p)}{p} + \frac{(p-1)y_1(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_1(b)-g_1(a))}\right)\max_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)y_0(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_0(b)-g_0(a))}\right)}{\max_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{(1-p)}{p} + \frac{(p-1)y_0(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_0(b)-g_0(a))}\right)} < 1 \tag{4}$$

que se cumple dada la hipótesis de partida (2), junto con la hipótesis de elección del valor x_0. La segunda hipótesis que tenemos que verificar es que si la sucesión $\{g_k\}$ es contractiva para $k \leq k_0$ éllo implica que también lo es para $k = k_0+1$. Supongamos pues

$$\frac{\|g_{k+1}-g_k\|}{\|g_k-g_{k-1}\|} = \frac{\|(T_k-I)S_k g_0\|}{\|(I-T_{k-2})S_k g_0\|} < 1, \ \forall k \leq k_0 \tag{5}$$

entonces tenemos $\|T_{k_0}-I\| < \|T_{k_0-2}-I\|$, y así, dado que según (4) se verificaba que para $k=1$ era contractiva, con lo que $\|T_1-I\| < \|T_0-I\|$, se puede observar que $\|T_k-I\|$ es monótona decreciente hasta $k=k_0$. Veamos ahora qué sucede para $k=k_0+1$.

$$\frac{\|g_{k_0+2}-g_{k_0+1}\|}{\|g_{k_0+1}-g_{k_0}\|} \leq \frac{\|S_{k_0+2}-S_{k_0+1}\|\,\|g_0\|}{\|S_{k_0+1}-S_{k_0}\|\,\|g_0\|} \leq \frac{\|T_{k_0+1}-I\|\,\|T_{k_0}\|\,\|S_{k_0}\|\,\|g_0\|}{\|T_{k_0}-I\|\,\|S_{k_0}\|\,\|g_0\|}$$

$$\leq \frac{\|T_{k_0+1}-I\|\,\|T_{k_0-2}\|}{\|T_{k_0}-I\|} \tag{6}$$

desigualdad que obtenemos aplicando (5). Pero sabemos que la norma espectral de cada operador de la sucesión es menor o igual que 1, dado que

$$\|T_k\|_2 = \left\|\frac{1}{p}I + \frac{p-1}{p}\frac{y_{k-1}(b-a)}{g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a)}D_{k-1}(x_0)\right\|_2 = \rho(T_k^T T_k)$$

y dado que el operador T_k es triangular inferior, la norma espectral es el mayor módulo de los elementos de la diagonal del operador $T_k^T T_k$, matriz diagonal por ser el producto de dos matrices triangulares, esto es

$$\|T_k\|_2 = \max_{i\in\mathbb{N}^*}\left|\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p}\frac{y_{k-1}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a)}\right|$$

Sabemos por la hipótesis de inducción (5) que la norma tiene valor siempre igual o inferior al obtenido para $k=1$ hasta $k=k_0$, por ser $\|T_k\|_2$ monótona decreciente hasta dicho valor de k. Además, si utilizamos la hipótesis (2) del teorema, relativa a la elección del valor x_0, operando en el valor de T_k introduciendo esa condición en su cálculo, obtenemos

$$\|T_k\| \leq \|T_{k-1}\| \leq \|T_{k-2}\| \leq \ldots \leq \|T_0\| \leq 1,\ \forall k \leq k_0+1$$

de lo que deducimos, por cumplirse las hipótesis del principio de inducción, que la norma espectral es siempre menor o igual que 1, es monótona decreciente y toma siempre valores menores o iguales a la unidad, con lo que $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es contractiva para $k=k_0+1$, aplicando ésto y (6). De esta forma, por inducción fuerte, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es contractiva $\forall k\in\mathbb{N}^*$, es convergente y converge a M, por ser éste el valor al que tiende en caso de converger, según se vio en [1], al dar lugar a una sucesión de Cauchy en el espacio normado completo $\mathbf{L^2}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$. $\square$

Referencias.

[1] Manuel Verdes Piñeiro. (2017). *Integración indirecta mediante el método de vasos comunicantes.* https://eclecticomania.files.wordpress.com/2020/08/metodo_vasos_comunicantes.pdf

[2] Manuel Verdes Piñeiro. (2019). *Convergencia de la sucesión de cambio variable en el espacio de Banach L_2.* https://eclecticomania.files.wordpress.com/2020/08/vasos_comunicantes_en_l2-2.pdf

[3] Manuel Verdes Piñeiro. (2020). *Condición suficiente de arranque para la convergencia del método de vasos comunicantes en el espacio de Banach L_2.* https://eclecticomania.files.wordpress.com/2021/08/condicion_arranque_suficiente_l2.pdf