Starting sufficient condition for the communicating tubes method convergence in the Banach space $\mathbf{L}^2([a,b])$

Condición suficiente de arranque para la convergencia del método de vasos comunicantes en el espacio de Banach $\mathbf{L}^2([a,b])$

Manuel Verdes Piñeiro

Dedicatoria. A mi amiga María José.

Abstract. In this paper, it is obtained a sufficient starting condition for the convergence in the cuadratic-integrable functions sucessions Banach space $L^2([a,b])$ of the variable change succession that was presented in [1], where were described the heuristics and the formal declarations of the communicating tubes method from a continous Riemann-integrable initial function $f(x),\ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Now I will explore from the Riemann-integrable functions sucession $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, defined in the cuadratic-integrable functions Banach space $L^2([a,b])$, refered to the interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$, a sintetic condition that implies the condition obtained in [2], $\forall k \in \mathbb{N}$, and so the convergence of the communicating tubes method applied to the function $f(x),\ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Resumen. En este artículo se obtiene una condición suficiente de arranque para la convergencia en el espacio de Banach $L^2([a,b])$ del método de vasos comunicantes descrito en el artículo anterior [1], dada una función continua Riemann-integrable inicial $f(x),\ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Se busca una condición que garantice que se cumple la condición obtenida en [2], $\forall k \in \mathbb{N}$, lo cual implica a su vez que la sucesión de funciones Riemann-integrables de cambio variable $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida en el espacio de Banach $L^2([a,b])$ de las funciones cuadrado-integrables en el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, converge al valor medio del cálculo integral de la función de partida $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

1 Expresión formal de la sucesión de cambio variable para el método de vasos comunicantes

En el artículo [1] se describió el método de vasos comunicantes, que permite un cálculo indirecto de la integral definida de una función $f(x) \in \mathbf{C}^\infty$ en el intervalo $[a,b] \in \mathbb{R}$. Tras describirse la heurística que permite deducir formalmente este método, en [1] se describe formalmente la sucesión de funciones $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que bajo ciertas condiciones converge al valor medio del cálculo integral M en el intervalo. Recordaré aquí la expresión de $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $x_0 \in (a,b)$ denominaremos como sucesión de cambio variable

Mathematics Subject Classifications: 26A42
Autor: Manuel Verdes Piñeiro.
e-mail: manuel.verdes@gmail.com
Nro. de Registro: M-002058/2020

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &= f(x)\\
g_0(x_0) &= y_0\\
g_1(x) &= \frac{y_0}{p} + \frac{(p-1)y_0(b-a)g_0^{'}(x)}{p(g_0(b)-g_0(a))}\\
g_1(x_0) &= y_1\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
g_{k+1}(x) &= \frac{y_k}{p} + \frac{(p-1)y_k(b-a)g_k^{'}(x)}{p(g_k(b)-g_k(a))}\\
g_{k+1}(x_0) &= y_{k+1}
\end{aligned}
$$

En el caso de que, para algún valor de k se cumpliese $g_k(a) = g_k(b)$, se elegirían $a_1 = a, b_1 = b-\epsilon, a_2 = b-\epsilon = b_1, b_2 = b$, tales que $g_k(a_1) \neq g_k(b_1)$ y $g_k(a_2) \neq g_k(b_2)$, definiendo en cada uno de los dos intervalos una sucesión

$$
\begin{aligned}
g_{k+1}^{(i)}(x) &= \frac{g_k(x)}{p} + \frac{(p-1)y_{ki}(b_i-a_i)g_k^{'}(x)}{p(g_k^{(i)}(b_i)-g_k^{(i)}(a_i))}\\
g_{k+2}^{(i)}(x) &= \frac{g_{k+1}^{(i)}(x)}{p} + \frac{(p-1)y_{(k+1)i}(b_i-a_i)g_{k+1}^{(i)'}(x)}{p(g_{k+1}^{(i)}(b_i)-g_{k+1}^{(i)}(a_i))}\ ,\ i\in\{1,2\}\\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

siendo y_{ki} el valor que verifica $y_{ki} = g_k^{(i)}(x_0)$ y verificándose

$$M(b-a) = M_1(b_1-a_1) + M_2(b_2-a_2) \tag{1}$$

2 Deducción de la condición suficiente de convergencia de la sucesión de cambio variable para el método de vasos comunicantes

A modo de recordatorio, incluyo aquí la deducción de la condición suficiente de convergencia de la sucesión de cambio variable, expuesta en el artículo [2], tras la deducción y descripción del método llevada a cabo en [1]. Así, dados k y $k+1$, tenemos

$$\|g_{k+1}-g_k\| = \|T_k g_k - g_k\| = \|(T_k - I)\, g_k\|$$

$$\|g_k - g_{k-1}\| = \|T_{k-1}g_{k-1} - g_{k-1}\| = \|(T_{k-1}-I)\, g_{k-1}\|$$

$$\frac{\|g_{k+1}-g_k\|}{\|g_k-g_{k-1}\|} = \frac{\|(T_k-I)\, g_k\|}{\|(T_{k-1}-I)\, g_{k-1}\|}$$

$$\frac{\|(T_k-I)\, T_{k-1}\|_2}{\|(T_{k-1}-I)\|_2} = \frac{\inf\left\{|\lambda|\,\|x\|_2\,,\|(T_k-I)\,T_{k-1}x\| \leq \|\lambda x\|\right\}}{\sup\left\{\left\|(T_{k-1}-I)\,\frac{x}{\|x\|_2}\right\|\,\|x\|_2\right\}} \leq \frac{\|g_{k+1}-g_k\|}{\|g_k-g_{k-1}\|} \tag{2}$$

$$\frac{\|g_{k+1}-g_k\|}{\|g_k-g_{k-1}\|} \leq \frac{\sup\left\{\left\|(T_k-I)\,T_{k-1}\frac{x}{\|x\|_2}\right\|\,\|x\|_2\right\}}{\inf\left\{|\lambda|\,\|x\|_2\,,\|(T_{k-1}-I)\,x\|\leq\|\lambda x\|\right\}} = \frac{\|(T_k-I)\,T_{k-1}\|_2}{\|(T_{k-1}-I)\|_2} \tag{3}$$

De donde extraemos que podemos identificar los extremos izquierdo y derecho de las anteriores inecuaciones con el miembro central, de lo que se deduce

$$\frac{\|g_{k+1}-g_k\|}{\|g_k-g_{k-1}\|} = \frac{\|\,(T_k-I)\,T_{k-1})\,\|_2}{\|(T_{k-1}-I)\|_2} \tag{4}$$

Como para cualquier operador lineal A en el espacio de Banach L_2 tenemos $\|A\|_2 = \sqrt{\rho\,(A^T A)}$, se deduce tal y como se halló en [2] que una condición suficiente para la convergencia de la sucesión de cambio variable para su aplicación al método de vasos comunicantes en el espacio de Banach L_2 es

$$\frac{\|g_{k+1}-g_k\|}{\|g_k-g_{k-1}\|} \leq \frac{\max_{i\in\mathbb{N}}(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-1}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a))})\max_{i\in\mathbb{N}}(\frac{1}{p}+\frac{(p-1)(y_{k-2})(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))})}{\max_{i\in\mathbb{N}}(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-2}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))})} < 1,\ \forall k\in\mathbb{N} \tag{5}$$

Proposición 1 *(Simplificación de la condición suficiente (5)). El método de vasos comunicantes converge según la sucesión de cambio variable $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ al valor medio del cálculo integral M si se verifica*

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)| < \frac{\max_{x,y\in[a,b]}|f(x)-f(y)|}{(b-a)i|x_0-a|^{i-1}},\quad \forall i\in\mathbb{N}$$

PRUEBA. *Dado que la expresión (5) no es independiente del número de iteración k, no daría lugar a una metodología práctica para verificar que la sucesión de cambio variable converge. En su lugar, se realizará una simplificación de los cálculos con final en una inecuación a cumplir por la función de partida $f(x)$.*

Denotemos primeramente $R_{ik} = \frac{|y_k(b-a)i(x_0-a)^{i-1}|}{|f_k(b)-f_k(a)|}$ $i,k\in\mathbb{N}$, y también $R_{max} = \max_{i,k\in\mathbb{N}}\{R_{ik}\}$, de tal manera que podemos operar sobre la condición suficiente (5) según sigue

$$\frac{\max_{i\in\mathbb{N}}(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-1}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a))})\max_{i\in\mathbb{N}}(\frac{1}{p}+\frac{(p-1)(y_{k-2})(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))})}{\max_{i\in\mathbb{N}}(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-2}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))})} =$$

$$= \frac{\frac{(1-p)}{p^2}-\frac{(1-p)^2}{p^2}R_{max}+\frac{(p-1)}{p^2}R_{max}+\frac{(p-1)^2}{p^2}R_{max}^2}{\frac{1-p}{p}+\frac{p-1}{p}R_{max}}$$

Dividimos en numerador y denominador por $(p-1)R_{max}$ y tenemos

$$\frac{\frac{(1-p)}{(p-1)R_{max}}+1-p+1+(p-1)R_{max}}{\frac{p(1-p)}{(p-1)R_{max}}+p} < 1\,,$$

con lo que haciendo el cambio $s=(p-1)R_{max}$, $(1-p)=m$, tenemos

$$\frac{1-p+2s-ps+s^2}{p(1-p)+ps} < 1 \Leftrightarrow \frac{m(1+s)+s(1+s)}{p(m+s)} < 1$$

$$m(1+s)+s(1+s) < p(m+s) \Leftrightarrow (1+s)(m+s) < p(m+s)$$

o lo que es lo mismo

$$s < p - 1 \Leftrightarrow R_{max} < 1$$

condición que podemos dejar expresada en términos de $\max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *y de* $\max_{x,y\in[a,b]} |f(x) - f(y)|$ *del siguiente modo*

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| < \frac{\max_{x,y\in[a,b]} |f(x) - f(y)|}{(b-a)i|x_0 - a|^{i-1}}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{6}$$

que es la expresión que establece una condición suficiente para la convergencia de la sucesión de cambio variable $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en el espacio de Banach* L_2. □

Referencias.

[1] *Manuel Verdes Piñeiro. (2017). Integración indirecta mediante el método de vasos comunicantes.* https://eclecticomania.files.wordpress.com/2020/08/metodo_vasos_comunicantes.pdf

[2] *Manuel Verdes Piñeiro. (2019). Convergencia de la sucesión de cambio variable en el espacio de Banach* L_2. https://eclecticomania.files.wordpress.com/2020/08/vasos_comunicantes_en_l2-2.pdf