Variable change sucession convergence in the Banach space L2

Convergencia de la sucesión de cambio variable en el espacio de Banach L2

Manuel Verdes Piñeiro

Dedicatoria. A mis amigas Yoly y María José.

Abstract. In this paper, it is obtained a sufficient condition for the convergence in the cuadratic-integrable functions sucessions Banach space L^2 of the variable change succession that was presented in [1], where were described the heuristics and the formal declarations of the communicating tubes method from a continous Riemann-integrable initial function $f(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Now I will explore from the Riemann-integrable functions sucession $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, defined in the cuadratic-integrable functions Banach space, refered to the interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, a sintetic condition that implies the convergence of the communicating tubes method applied to the function $f(x)$.

Resumen. En este artículo se obtiene una condición suficiente para la convergencia en el espacio de Banach de funciones cuadráticamente integrables L^2 de la sucesión de cambio variable que fue presentada en [1], donde fueron descritas la heurística y las declaraciones formales de las sucesiones que aplican en el método de vasos comunicantes, a partir de una función continua Riemann-integrable inicial $f(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Ahora exploraré a partir de la sucesión de funciones Riemann-integrables $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida en el espacio de Banach de las funciones cuadráticamente integrables, referidas al intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, una condición sintética que implica la convergencia del método de vasos comunicantes aplicado a la función $f(x)$.

1 La sucesión de cambio variable para el método de vasos comunicantes

Tras la descripción de la heurística empleada, en [1] se describió la sucesión de cambio variable, cuya metodología transcribiré aquí a modo de recordatorio y como primer paso del desarrollo.

Definición 1 *Sea $f_0(x) = f(x) \in \mathbf{C}^\infty([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ una función continua regular clase ∞ definida en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, Riemann-integrable, verificando $f(a) \neq f(b)$, y sea $p \in \mathbb{N}^*,\ p > 1$*

Dado $x_0 \in (a, b)$, denominaremos sucesión de cambio variable a la siguiente sucesión de funciones

---

Mathematics Subject Classifications: 26A42
Autor: Manuel Verdes Piñeiro.
e-mail: manuel.verdes@gmail.com
Nro. de Registro: C-000022/2019

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= f(x)\\
g_0(x_0) &= y_0\\
g_1(x) &= \frac{y_0}{p} + \frac{(p-1)y_0(b-a)g_0^{'}(x)}{p(g_0(b)-g_0(a))}\\
g_1(x_0) &= y_1\\
&\vdots\\
g_{k+1}(x) &= \frac{y_k}{p} + \frac{(p-1)y_k(b-a)g_k^{'}(x)}{p(g_k(b)-g_k(a))}\\
g_{k+1}(x_0) &= y_{k+1}
\end{aligned}$$

En el caso de que, para algún valor de k se cumpliese $g_k(a) = g_k(b)$, se elegirían $a_1 = a, b_1 = b-\epsilon, a_2 = b-\epsilon = b_1, b_2 = b$, tales que $g_k(a_1) \neq g_k(b_1)$ y $g_k(a_2) \neq g_k(b_2)$, definiendo en cada uno de los dos intervalos una sucesión

$$\begin{aligned}
g_{k+1}^{(i)}(x) &= \frac{g_k(x)}{p} + \frac{(p-1)y_{ki}(b_i-a_i)g_k^{'}(x)}{p(g_k^{(i)}(b_i)-g_k^{(i)}(a_i))}\\
g_{k+2}^{(i)}(x) &= \frac{g_{k+1}^{(i)}(x)}{p} + \frac{(p-1)y_{(k+1)i}(b_i-a_i)g_{k+1}^{(i)'}(x)}{p(g_{k+1}^{(i)}(b_i)-g_{k+1}^{(i)}(a_i))}\ ,\ i \in \{1,2\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

siendo y_{ki} el valor que verifica $y_{ki} = g_k^{(i)}(x_0)$ y verificándose

$$M(b-a) = M_1(b_1-a_1) + M_2(b_2-a_2) \tag{1}$$

Definición 2 *En el espacio vectorial $\Lambda^2_{|.|}([a,b]) \subseteq C^{-1}([a,b],\mathbb{R})$ de las funciones cuadrado-integrables, que verifican*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

se define la norma

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

y la relación de equivalencia

$$fRg \Leftrightarrow f{=}g,\ c.t.p.$$

esto es

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx = 0$$

de tal manera que se define el espacio cociente

$$L_2 = \frac{\Lambda^2_{|.|}([a,b])}{R}$$

Se trata de un espacio normado de Banach, en particular un espacio de Hilbert, por ser la norma inducida por el producto escalar

$$< f(x), g(x) >= \int_a^b f(x)g^*(x)dx$$

no haciéndose distinción entre función y clase de equivalencia en este contexto.

2 Estudio de la convergencia

Calculemos primeramente la expresión del operador $T_0(x)$ entre los espacios de Banach L_2 y L_2 antes descritos que transforma $g_0(x)$ en $g_1(x)$.

$$g_1(x) = \frac{g_0(x)}{p} + \frac{(p-1)}{p}\frac{y_0(b-a)}{g_0(b)-g_0(a)}g_0^{'}(x) \tag{2}$$

Si suponemos $g_0(x)$ expresado en la base canónica de los monomios $(x-a)^r$, variando r, esto es como $g_0(x) \in \mathbf{C}^\infty([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, $g_0(x)$ admite desarrollo en serie de Taylor, podemos escribir

$$g_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g_0^{(m}(a)}{m!}(x-a)^m$$

de modo que podemos pasar a la representación vectorial de $g_0(x)$ según la siguiente ecuación

$$g_0 = \lim_{m\to\infty} \begin{bmatrix} g_0(a) \\ g_0^{'}(a) \\ \vdots \\ \frac{g_0^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= \lim_{m\to\infty} \frac{I_m}{p} \begin{bmatrix} g_0(a) \\ g_0^{'}(a) \\ \vdots \\ \frac{g_0^{(m-1}(a)}{(m-1)!} \end{bmatrix} \\
&+ \lim_{m\to\infty} \frac{(p-1)y_0(b-a)}{p(g_0(b)-g_0(a))}\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (x-a) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & (x-a)^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (x-a)^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0(a) \\ g_0^{'}(a) \\ \vdots \\ \frac{g_0^{(m-1}(a)}{(m-1)!} \end{bmatrix} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p}\left(I_m + (p-1)\frac{y_0(b-a)D_0(x)}{g_0(b)-g_0(a)}\right) g_0 \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{I_m}{p} + \frac{(p-1)y_0(b-a)}{p(g_0(b)-g_0(a))}D_0(x)\right) g_0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \left(\lim_{m\to\infty} \frac{I_m}{p} + \frac{(p-1)y_0(b-a)}{p} \lim_{m\to\infty} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (x-a) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)(x-a)^{m-2} \end{bmatrix} \right) \lim_{m\to\infty} \begin{bmatrix} g_0(a) \\ g_0^{'}(a) \\ \vdots \\ \frac{g_0^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{p} \lim_{m\to\infty} \left(I_m + \frac{(p-1)y_0(b-a)}{(g_0(b)-g_0(a))} D_0(x) \right) g_0 \\
&= T_0(x) g_0
\end{aligned}
$$

donde se ha empleado el vector $\lim_{m\to\infty}\left[g_0(a), g_0^{'}(a), \frac{g_0^{''}(a)}{2!}, \dots, \frac{g_0^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}\right]^T$ como representación de la función $g_0(x)$ en la base de los monomios $(x-a)^r$, variando el valor de r.

Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, y fijando el valor de x_0 al evaluar T_k se tiene

$$g_{k+1} = T_k g_k$$

con lo que podemos escribir

$$g_{k+1} = \left(\prod_{l=0}^{k} T_{k-l} \right) g_0$$

de tal manera que $T = \left(\Pi_{l=0}^{k} T_{k-l}\right)$ es el operador entre los espacios de Banach L_2 y L_2 que convierte g_0 en g_{k+1}

Lema 1 *Dada la sucesión de cambio variable $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, se puede expresar el elemento $k+1$ en función del elemento 0 según la ecuación*

$$g_{k+1} = \lim_{m\to\infty} \prod_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{p} \left(I_m + \frac{(p-1)y_{k-i}(b-a)D_{k-i}(x_0)}{(g_{k-i}(b) - g_{k-i}(a))} \right) \right) g_0$$

PRUEBA. El resultado se probaría por inducción y su demostración es trivial a partir de lo deducido en la sección anterior. □

Lema 2 *Dados k y $k+1$, se verifica*

$$\|g_{k+1} - g_k\| = \|T_k g_k - g_k\| = \|(T_k - I)\, g_k\|$$

$$\|g_k - g_{k-1}\| = \|T_{k-1} g_{k-1} - g_{k-1}\| = \|(T_{k-1} - I)\, g_{k-1}\|$$

$$\frac{\|g_{k+1} - g_k\|}{\|g_k - g_{k-1}\|} = \frac{\|(T_k - I)\, g_k\|}{\|(T_{k-1} - I)\, g_{k-1}\|}$$

$$\frac{\|g_{k+1} - g_k\|}{\|g_k - g_{k-1}\|} \leq \frac{\|(T_k - I)\, T_{k-1}\|_2}{\|(T_{k-1} - I)\|_2}$$

Proposición 1 *Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes: (i) Existe $x_0 \in X$ tal que T es continua en x_0. (ii) T es continua en 0. (iii) T es continua. (iv) T es uniformemente continua. (v) T es Lipschitziana.*

PRUEBA. Se trata de un teorema clásico en el análisis funcional, demostrado en [3].

Proposición 2 *El método de vasos comunicantes, converge en el espacio de Hilbert L_2 si*

$$\frac{\max_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-1}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a))}\right)\max_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{p}+\frac{(p-1)(y_{k-2})(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))}\right)}{\max_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-2}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))}\right)}<1 \quad ,\forall k\in\mathbb{N}$$

PRUEBA. De acuerdo con [2], consideramos la norma espectral $\|.\|_2$ en el espacio de matrices cuadradas de orden m. El valor numérico de esta norma es

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)}$$

Se trata de una norma inducida, y por lo tanto submultiplicativa

$$\|AB\|_2\leq\|A\|_2\,\|B\|_2$$

De esta manera, usando el lema 2, podemos deducir

$$\frac{\|(T_k(x)-I)\,T_{k-1}(x)\|_2}{\|(T_{k-1}(x)-I)\|_2}\leq\frac{\|T_k(x)-I\|_2\,\|T_{k-1}(x)\|_2}{\|(T_{k-1}(x)-I)\|_2} \tag{3}$$

Comencemos por calcular el radio espectral del operador del numerador

$$T_k-I=\lim_{m\to\infty}\frac{(1-p)I_m}{p}+\frac{(p-1)y_{k-1}(b-a)}{p\,(g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a))}\lim_{m\to\infty}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&\dots&0\\ \vdots&\dots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&\dots&1&0&0&\dots&0\\ 0&\dots&0&(x-a)&0&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\dots&0\\ 0&0&0&0&0&\dots&(m-k)(x-a)^{m-k+1}\end{bmatrix}$$

De acuerdo con ésto, la matriz $(T_k-I)^T(T_k-I)$ es diagonal, con sus autovalores en la diagonal, y dan lugar al siguiente valor para la norma espectral

$$\|T_k-I\|_2=\max_{i\in\mathbb{N}}\left|\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-1}(b-a)i\,(x_0-a)^{i-1}}{p\,(g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a))}\right|$$

Por otra parte, la matriz $(T_k)^T(T_k)$ también es diagonal, y origina la siguiente norma espectral

$$\|T_k\|_2=\max_{i\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{p}+\frac{(p-1)\,(y_{k-1})\,(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p\,(g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a))}\right|$$

Por lo tanto, aplicando estos resultados en (3) tenemos

$$\frac{\|T_k(x)-I\|_2\,\|T_{k-1}(x)\|_2}{\|(T_{k-1}(x)-I)\|_2}=\frac{\max_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-1}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a))}\right)\max_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{p}+\frac{(p-1)(y_{k-2})(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))}\right)}{\max_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-2}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))}\right)}$$

Luego la sucesión de operadores T_k tal que $g_{k+1}=T_kg_k$ es contractiva si la norma espectral del operador del numerador es inferior a la norma espectral del operador del denominador, esto es

$$\frac{\max_{i\in\mathbb{N}}(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-1}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-1}(b)-g_{k-1}(a))})\max_{i\in\mathbb{N}}(\frac{1}{p}+\frac{(p-1)(y_{k-2})(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))})}{\max_{i\in\mathbb{N}}(\frac{(1-p)}{p}+\frac{(p-1)y_{k-2}(b-a)i(x_0-a)^{i-1}}{p(g_{k-2}(b)-g_{k-2}(a))})}<1 \quad ,\forall k\in\mathbb{N}$$

Si ocurre que $g_i(a)\neq g_i(b),\ \forall i\in\mathbb{N}$, lo cual está garantizado por la definición formal de la sucesión de cambio variable y si se cumple la anterior condición para todo $k\in\mathbb{N}$, en ese caso, sucederá que los operadores $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son Lipschitzianos y contractivos, y tal y como se ha probado en [3] uniformemente continuos, y hacen converger a $g_k(x)$ a un punto fijo tal que $T_\infty g_\infty = g_\infty$, con $g_\infty = M$ la función constante e igual al valor medio del cálculo integral, por ser en ese caso $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el espacio normado completo L_2. $\square$

Referencias.

[1] Manuel Verdes Piñeiro. (2017). *Integración indirecta mediante el método de vasos comunicantes*. https://eclecticomania.files.wordpress.com/2020/08/metodo_vasos_comunicantes.pdf

[2] Ana Izaballa. (2017). *Normas de vectores y matrices*.http://www.ehu.eus/izaballa/Ana_Matr/Transparencias/presen02-1x2.pdf

[3] *Complitud y continuidad uniforme*. http://www.ugr.es/~rpaya/documentos/AnalisisI/2015-16/Complitud.pdf